オイラーの公式

$\sin x$，$\cos x$，e^x のマクローリン展開を見ると，同じような形をしていることに気づく。$\sin x$ は x^{2n-1} の項があって x^{2n} の項がない。$\cos x$ はその逆である。また，$\sin x$，$\cos x$ ともに符号が交互に入れ変わる。それに対して，e^x はすべての項がある。これらに何か関係がないかと考えてみると，次のようなことが思い浮かぶ。

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1+(ix)+\frac{1}{2!}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\frac{1}{4!}(ix)^4+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}(ix)^n+\cdots\cdots \\
&= 1+ix-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}ix^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}ix^{2n-1}+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\cdots \\
&= \left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\cdots\right) \\
&\qquad +i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots\cdots\right) \\
&= \cos x+i\sin x \qquad \textbf{（オイラーの公式）}
\end{aligned}
$$

このような操作をしてもよいかどうかは別として（実際には可能であるが），複素数（虚数）の世界を通して，全く異なった関数である三角関数と指数関数が見事に結びつくのである。この等式を用いると，$e^{i\pi}=-1$ となり，$\log(-1)=i\pi$ となる。これ以上続けると，わけがわからなくなりそうなので，ここで一旦やめることにするが，この公式 $e^{i\pi}+1=0$（0，1，π，e と虚数単位 i を用いて表される美しい等式）にはただただ驚嘆するばかりである。